Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

# Mathematická analýza II

## Dobrovolný domácí úkol 11

K dobrovolnému odevzdání kdykoli via OWL

---

*Transformers*

**Úkol 1 (Isodiametrická nerovnost v 2D).**

Nechť je $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ spojité a $\pi$-periodické, tj., $g(\theta + \pi) = g(\theta)$ pro každé $\theta \in \mathbb{R}$. Definujme

$$\Omega = \{(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi],\, 0 \le r \le g(\theta)\},$$

a diameter množiny $\Omega$ přes

$$\operatorname{diam}(\Omega) = \sup\{|x - y| : x, y \in \Omega\}.$$

a) Dokažte, že objem $A$ množiny $\Omega$ je

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [g(\theta)]^2 d\theta.$$

(*Tip*: napište $A = \int_\Omega 1\, d(x, y)$, používejte transformaci do polárních souřadnic $(x, y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$, a používejte Fubiniovu větu.)

b) Dokažte, že

$$A \le \pi \left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{2}\right)^2.$$

Dodejte geometrickou interpretaci této nerovnosti *pro fixovaný diameter* $\operatorname{diam}(\Omega)$. Porovnejte k tomu libovolnou funkci $g$ se specialní konstantní funkcí $g_0 = \operatorname{diam}(\Omega)/2$. (*Tip*: jakou geometrickou vlastnost obsahuje periodicita pro $g$? Jaký vztah mezi $\operatorname{diam}(\Omega)$ a $\sup_{\theta\in\mathbb{R}} g(\theta)$ můžete z toho usuzovat? Obraz by pomohl.)

**Řešení.** a) Používáme sférické souřadnice $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ a počítáme Jacobiho determinant

$$\det D\Phi = \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

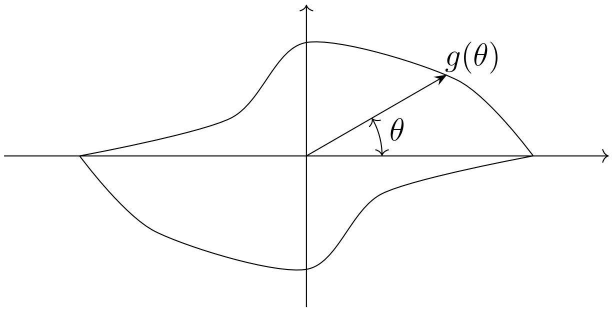
Pak věty o transformaci a Fubiniovy nám dávají

$$A = \int_\Omega 1\, d(x, y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{g(\theta)} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=g(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[g(\theta)]^2\, d\theta.$$

b) Periodicita funkce $g$ má za následek symetrii množiny $\Omega$ vzhledem k počátku; vskutku $\Omega$ je tzv. *star-shaped*. Jelikož $g$ je spojité a vsude kladné, usuzujeme, že $2\sup_{\theta\in\mathbb{R}} g(\theta) = \operatorname{diam}(\Omega)$. Vložme toto do $A$, vidíme

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [g(\theta)]^2\, d\theta \le \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\sup_{\theta\in\mathbb{R}} g(\theta)\right]^2 d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{2}\right)^2 \cdot 2\pi = \pi\left(\frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{2}\right)^2.$$

Interpretace této nerovnosti je taková: pro fixovaný diameter, kruh (resp. disk) maximalizuje obsah množiny, která má onen diameter. Jinými slovy, množina se specifikováným diametrem nemůže mít větší obsah než odpovídající disk stejného diametru.




**Úkol 2 (Vánoce).**

Definujme si

$$h(z) = z - \frac{1}{2}\lfloor z\rfloor - \lfloor z/4\rfloor(z - 5/2), \quad z \in (0,5).$$

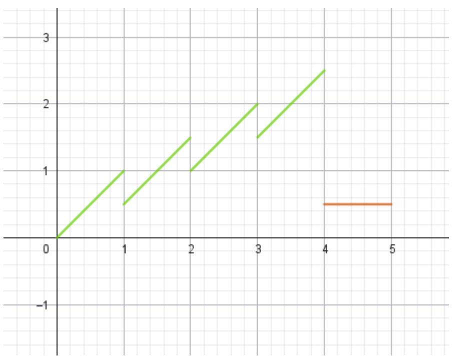
Tady je $\lfloor x\rfloor = \max\{k\in\mathbb{Z} : k \le x\}$ největší celé číslo menší než reálné číslo $x\in\mathbb{R}$. Nechť je také

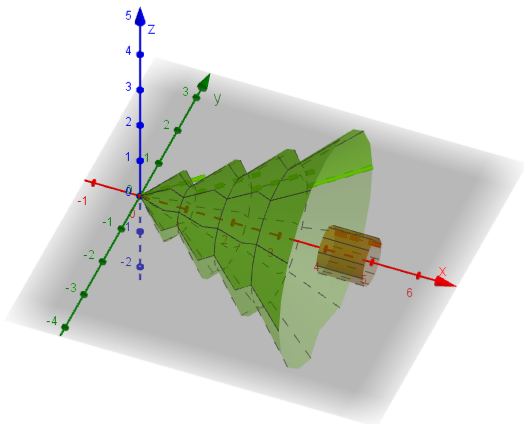
$$VS = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le h(z)^2\}.$$

a) Nakreslete $h$ a $VS$ (můžete i použit barvy).

b) Spočítejte objem $VS$.

**Řešení.** a) Obrazky:





b) Používáme válcové souřadnice $\Phi(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$. Jacobiho determinant tohoto zobrazení je

$$\det D\Phi = \det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = r.$$

Věta o transformaci nám pak říká

$$vol(CT) = \int_{CT} 1\, d(x, y) = \int_0^5 \int_0^{2\pi} \int_0^{h(z)} r\, dr\, d\theta\, dz = \pi \int_0^5 [h(z)]^2\, dz.$$

Rozdělme interval $(0, 5)$ do podintervalů $(k, k+1)$ s $k \in \{0, ..., 4\}$ a počítejme

- $z \in (0, 1)$: $h(z) = z$, $\quad z \in (1, 2)$: $h(z) = z - 1/2$,
- $z \in (2, 3)$: $h(z) = z - 1$, $\quad z \in (3, 4)$: $h(z) = z - 3/2$,
- $z \in (4, 5)$: $h(z) = 1/2$.

Potom

$$\begin{aligned}
Vol(WB) &= \pi\left[\int_0^1 z^2 + \int_1^2 (z-1/2)^2 + \int_2^3 (z-1)^2 + \int_3^4 (z-3/2)^2 + \int_4^5 (1/2)^2\right]\\
&= \pi\left[\frac{1}{3}z^3\Big|_0^1 + \frac{1}{3}(z-1/2)^3\Big|_1^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3\Big|_2^3 + \frac{1}{3}(z-3/2)^3\Big|_3^4 + \frac{1}{4}\right]\\
&= \pi\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{27}{8} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}(8-1) + \frac{1}{3}\left(\frac{125}{8} - \frac{27}{8}\right) + \frac{1}{4}\right]\\
&= \frac{97}{12}\pi.
\end{aligned}$$

Veselé Vánoce a Šťastný nový rok 2026!