Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analýza II

Domácí úkol 10

K odevzdání do čtvrtka, 18.12.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Fubiniova věta). *(5 bodů)*

Nechť jsou $a, b > 0$. Počítejte plochu elipsy

$$E = \left\{x, y \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}.$$

Řešení. Zaprvé vidíme $x^2/a^2 \leq 1$, tedy $x \in [-a, a]$. Potom přepíšeme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

To nám dává pro každé $x \in [-a, a]$ rozsah proměnné y. Navíc je množina E kompaktní (zřejmě je to uzavřená a omezená množina z $\mathbb{R}^2$, tak Heine-Borelova věta platí) a konstantní funkce 1 je spojitá, tak celý integrál $\int_E 1 \, d(x, y)$ existuje. Proto můžeme použit Fubiniovu větu a najdeme pro hledaný obsah

$$vol(E) = \int_E 1 \, d(x, y) \overset{Fubini}{=} \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1 \, dy \, dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx.$$

Jelikož $x^2/a^2 \leq 1$, máme $-1 \leq x/a \leq 1$. Zavedeme tedy substituci $x/a = \sin(t)$ s $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, ze které vyplyne $dx = a\cos(t)\, dt$ a pak pomocí $\cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$

$$\int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, dx = 2b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a\cos(t) \, dt = 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt = \pi ab.$$

Ve speciálním případě $a = b = r$ najdeme tedy známou formuli osahu disku: $vol(B_r) = \pi r^2$.

Úkol 2 (Protipříklad). *(5 bodů)*

Definujme si pro $x + y \neq 2$

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(2 - x - y)^3}.$$

Dokažte (bez pomoci AI!), že

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dy \, dx.$$

Proč to není spor s Fubiniovou větou?

Řešení. Fixujme y a počítejme

$$\int_0^1 \frac{y-x}{(2-x-y)^3}\,dx.$$

Existují různé způsoby to udělat; já tady používám substituci. Nechť je $z = 2-x-y$, pak $dx = -dz$ a integrál bude

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{y-x}{(2-x-y)^3}\,dx &= \int_{1-y}^{2-y} \frac{2y-2+z}{z^3}\,dz = (y-1)\int_{1-y}^{2-y} \frac{2}{z^3}\,dz + \int_{1-y}^{2-y} \frac{1}{z^2}\,dz \\
&= (y-1)\Big(\frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(2-y)^2}\Big) + \frac{1}{1-y} - \frac{1}{2-y} \\
&= \frac{y-1+(1-y)}{(1-y)^2} - \frac{y-1+(2-y)}{(2-y)^2} = -\frac{1}{(2-y)^2}.
\end{aligned}$$

Z důvodů symetrie, pro fixované x, podobné počítání nám dává

$$\int_0^1 \frac{y-x}{(2-x-y)^3}\,dy = \frac{1}{(2-x)^2}.$$

Proto máme

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = -\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx,$$

a další počítání dává

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 -\frac{1}{(2-y)^2}\,dy = \frac{1}{2-y}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2},$$

aby konečně

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx.$$

Tento výsledek není spor s Fubiniovou větou proto, že integrál

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} |f(x,y)|\,d(x,y)$$

neexistuje (ani bez absolutní hodnoty); vskutku situace je ještě horší, funkce f ani není omezená na čtverci $[0,1]\times[0,1]$ kvůli tomu, že máme

$$f(1,y) = \frac{y-1}{(1-y)^3} = -\frac{1}{(1-y)^2}$$

a tedy $|f(1,y)| \to \infty$ když $y \to 1$.