DR. FLORIAN OSCHMANN

KARLOVA UNIVERZITA
Zimní semestr 2025/26

Matematická analýza II

Domácí úkol 9

K odevzdání do čtvrtka, 11.12.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Integrace per partes). *(2+3=5 bodů)*

a) Dokažte, že pro každé dvě spojitě diferencovatelné funkce $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

(*Tip:* uvažujte funkci $F(x) = f(x)g(x)$.)

b) Nechť je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitě diferencovatelné a nechť pro každé $k \in \mathbb{N}$

$$a_k := \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx.$$

Dokažte, že $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Řešení. a) Pomocí pravidla součinu máme

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Lineárnost Riemannova integrálu a základní věta analýzy nám dávají

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = f(x)g(x)\Big|_a^b,$$

což implikuje to, co chceme.

b) Toto je verze tzv. Riemann-Lebesgueovy lemmy. Definujme si $g'(x) = \sin(kx)$ a použijme a), najdeme

$$a_k = -f(x)\frac{\cos(kx)}{k}\Big|_a^b + \int_a^b f'(x)\frac{\cos(kx)}{k}\,dx.$$

Jelikož f je spojitě diferencovatelné a $[a, b]$ je kompaktní, existuje číslo $M > 0$ takové, aby

$$\sup_{x\in[a,b]}\Big(|f(x) + |f'(x)|\Big) \le M.$$

Používáme též, že $|\cos(kx)| \le 1$, najdeme

$$|a_k| \le \frac{2M}{k} + \frac{M(b-a)}{k}.$$

V limitě $k \to \infty$ jsme potvrzení dokázali. Všimněte si, že jsme dokázali ještě silnější verzi: máme rychlost konvergence, zajména, a_k nemůže jít k nule pomaleji než $1/k$.

Úkol 2 (Riemannův integrál v nD). *(3+2=5 bodů)*

Používáme zde slova “interval” a “cihla” synonymně.

a) Dokažte *dle definice*, že pro každý kompaktní interval (kompaktní cihlu) $J \subset \mathbb{R}^n$ a každé číslo $c \in \mathbb{R}$, Riemannův integrál $\int_J c\,dx$ existuje a že platí $\int_J c\,dx = c \cdot vol(J)$.

b) Nechť je $J = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ kompaktní interval. Funkci $\phi : J \to \mathbb{R}$ říkáme *schodovitá funkce*, pokud jsou-li čísla $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ a párově disjunktní intervaly (cihly) $I_1, \ldots, I_k \subset J$ takové, aby[1]

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i}(x), \qquad \text{kde} \qquad \chi_{I_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in I_i, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Dokažte, že pro každou schodovitou funkci platí

$$\int_J \phi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot vol(I_i).$$

(Můžete bez důkazu používat, že pro intervaly $I \in \{(a,b),\ [a,b),\ (a,b],\ [a,b]\}$ platí $vol(I) = b - a$, a že funkce χ_{I_i} je integrabilní na cihle I_i. Obraz by mohl být nápomocný, třeba pro $k = 2$, $J = [0,1]$, $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $I_2 = (\frac{1}{2}, 1]$ i $c_1 = 1$, $c_2 = 2$.)

Řešení. a) Nechť je P rozdělení cihly J a $\mathcal{B}(P)$ je množina všech cihel, které můžeme vytvořit z P. Pak máme pro dolní a horní součet, že

$$s(c,P) = \sum_{B \in \mathcal{B}(P)} \inf_{x \in B}(c) \cdot vol(B) = \sum_{B \in \mathcal{B}(P)} c \cdot vol(B) = c \sum_{B \in \mathcal{B}(P)} vol(B) = c \cdot vol(J),$$
$$S(c,P) = \sum_{B \in \mathcal{B}(P)} \sup_{x \in B}(c) \cdot vol(B) = \sum_{B \in \mathcal{B}(P)} c \cdot vol(B) = c \sum_{B \in \mathcal{B}(P)} vol(B) = c \cdot vol(J),$$

kde jsme použili, že $vol(J) = \sum_{B \in \mathcal{B}(P)} vol(B)$. Tedy máme $s(c,P) = S(c,P)$ pro každé rozdělení, což implikuje, že

$$\underline{\int_J} c\,dx = \sup s(c,P) = c \cdot vol(J) = \int S(c,P) = \overline{\int_J} c\,dx.$$

To znamená, že Riemannův integrál $\int_J c\,dx$ existuje a si rovne $c \cdot vol(J)$.

b) Pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ máme pomocí a) a definice funkce χ_{I_i}, že

$$\int_J c_i \chi_{I_i}(x)\,dx = \int_{I_i} c_i\,dx = c_i \cdot vol(I_i).$$

Linearnost Riemannova integrálu pak dá

$$\int_J \phi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_J c_i \chi_{I_i}\,dx = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot vol(I_i).$$

Malá oprava: Vskutku $\mathcal{B}(P)$ není množina *všech* cihel vytvořeny z P, ale spíš *největší třída (skoro) disjunktních* cihel vytvořeny z P. Jinými slovy, cihly v $\mathcal{B}(P)$ jsou vytvořeny jen z bodů nejbližších sousedů z P (angl. nearest-neighbour-points). Pro celou formální definici, viz poznámky z přednášky.

[1] I když naše definice integrálu toto používala, intervaly I_i tady nemusí být uzavřené.