Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 8

K odevzdání do čtvrtka, 04.12.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Stejnoměrná spojitost). *(1+3=4 body)*

Nechť jsou (X, d) a (Y, e) metrické prostory. Funkce $f : X \to Y$ je *Lipschitzovsky spojitá* (resp. jenom *Lipschitz*) pokud existuje $L \geq 0$ takové, aby

$$e(f(x), f(y)) \leq L d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

a) Dokažte, že každá Lipschitzovsky spojitá funkce je stejnoměrně spojitá.

b) Dokažte, že $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ je stejnoměrně spojitá, ale není Lipschitz. Tady používáme $d(x, y) = e(x, y) = |x - y|$. (*Tip:* Rozdělte nezápornou reálnou přímku do $[0, 2]$ a $[1, \infty)$ a dokažte stejnoměrnou spojitost na každém těch intervalů. Pak zdůvodněte, proč toto implikuje stejnoměrnou spojitost všude na $[0, \infty)$.)

Úkol 2 (Riemannův integral). *(2+2+2=6 bodů)*

Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilní (tj., $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je konečné), a nechť je

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dokažte:

a) Funkce f je omezená[1].

b) $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ je Lipschitzovsky spojité, tj., existuje nějaké $L \geq 0$ takové, aby

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

c) Pokud $f \geq 0$, pak F je monotónně rostoucí.

[1] To platí obecně: každá funkce, která je integrabilní v Riemannovém smyslu, je omezená.