DR. FLORIAN OSCHMANN

KARLOVA UNIVERZITA
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 7

K odevzdání do čtvrtka, 27.11.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Vazáné extrémy). *(6 bodů)*

Spočítejte minimalní vzdálenost bodu $x_0 = (1, -1, 1)$ od množiny $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 2xy + 1\}$. (Tip pro jednodušší počítání: jak se řekne “Viereck der Entfernung” anglicky? Vysvětlujte, proč to dělat smíte/proč nic neztrácíte.)

Řešení. Nechť

$$
\begin{aligned}
d(x, y, z) &= |(x, y, z) - (1, -1, 1)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2},\\
g(x, y, z) &= z^2 - 2xy - 1.
\end{aligned}
$$

Zřejmě $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$. Chceme tedy najít minimum funkce d při vazbě g. Protože funkce d je vždy nezaporná, neztrácíme informace, když uvážujeme její druhou mocninu, protože druhá mocnina je monotónní funkce (“Viereck der Entfernung” se překládá na “square of distance”, tedy kvadrát/druhá mocnina distance); proto definujme $f(x, y, z) = [d(x, y, z)]^2$ a

$$
\Lambda(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 + \lambda(z^2 - 2xy - 1).
$$

Pak máme

$$
\begin{aligned}
\partial_x \Lambda &= 2(x-1) - 2\lambda y,\\
\partial_y \Lambda &= 2(y+1) - 2\lambda x,\\
\partial_z \Lambda &= 2(z-1) + 2\lambda z,\\
\partial_\lambda \Lambda &= z^2 - 2xy - 1 = g(x, y, z).
\end{aligned}
$$

Abychom našli extrém, potřebujeme $\nabla_{(x,y,z,\lambda)}\Lambda = 0$ (všimněte si, že tento gradient je 4D vektor a vskutku budeme potřebovat všechny čtyři rovnice). Musíme tedy řešit system rovnicí (závisle na λ)

$$
\begin{aligned}
x - 1 - \lambda y &= 0,\\
y + 1 - \lambda x &= 0,\\
z(1+\lambda) - 1 &= 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ze kterého ihned vidíme $z = 1/(1+\lambda)$ i $\lambda \neq -1$. Sčítání první a druhé rovnice nám dává $x + y = \lambda(x + y)$, tedy $(x + y)(1 - \lambda) = 0$ a tím pádem buď $\lambda = 1$ anebo $x = -y$. Když $\lambda = 1$, pak $x = 1 + y$ a $z = \frac{1}{2}$. Vložíme to do vazby g, vidíme

$$
0 = g(1 + y, y, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - 2y(1 + y) - 1 = -\frac{3}{4} - 2y(1 + y).
$$

Tato rovnice je ekvivalentní k $0 = y^2 + y + \frac{3}{8} = (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{8}$, kteráž nemá reálné řešení. Proto platí $\lambda \neq 1$.

Když $x = -y$, pak první dvě rovnice v (1) nám dávají $x = 1/(1+\lambda)$ i $y = -1/(1+\lambda)$. Vložení do vazby g nám dává

$$0 = g(\frac{1}{1+\lambda}, -\frac{1}{1+\lambda}, \frac{1}{1+\lambda}) = \frac{1}{(1+\lambda)^2} + \frac{2}{(1+\lambda)^2} - 1 = \frac{3}{(1+\lambda)^2} - 1$$

a proto $\lambda = \pm\sqrt{3} - 1$. Body našého zájmu jsou pak

$$P_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \in M.$$

Počítáme kvadratické distance, vidíme

$$f(P_+) = (\frac{1}{\sqrt{3}} - 1)^2 + (-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}} - 1)^2 = 3(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1)^2 = (\sqrt{3} - 1)^2,$$
$$f(P_-) = (-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1)^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)^2 + (-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1)^2 = 3(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1)^2 = (\sqrt{3} + 1)^2$$

a odsud usuzujeme, že P_+ je minimum funkce f a zároveň d na M. Minimalní vzdálenost pak je $d(P_+) = \sqrt{3} - 1$.

Úkol 2 (Směrová derivace). *(2+2=4 body)*

a) Nechť $v \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dokažte, že $D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$.

b) Počítejte $D_v f(x_0)$ jednou podle definice a jednou pomocí identity z úkolu a):

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad x_0 = (1, 1), \qquad v = (1, 1).$$

Řešení. a) Protože f má totální diferenciál, můžeme napsat

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot tv + |tv|\mu(tv)$$

pro $t \neq 0$ dostatečně malé, kde μ je spojitá funkce s $\mu(0) = 0$. Z definice totálního diferenciálu to není nic jiného než $h = tv$. Pak

$$D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\nabla f(x_0) \cdot tv + |tv|\mu(tv)}{t} = \nabla f(x_0) \cdot v + |v| \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\mu(tv).$$

Jelikož $||t|/t| = 1$ a μ je spojité s $\mu(0) = 0$, poslední limita je nula a jsme hotovi.

b) Podle definice: máme

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) = (1 + t)^2 + (1 + t)^2 - 2 = 4t + 2t^2;$$

tedy

$$D_v f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{4t + 2t^2}{t} = 4.$$

Pomocí identity: máme

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \Rightarrow \nabla f(x_0) = (2, 2).$$

Proto

$$D_v f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4.$$