Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 6

K odevzdání do čtvrtka, 20.11.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Implicitnost a víc). *(3+1*+3+1=7+1* bodů)*

Zdůvodněte všechny odpovědi v tomto úkolu dostatečně (tj., ověřte podmínky vět, které používáte, jaké jsou z nich závěry, atd.)!

a) Dokažte, že v blízkosti bodu $x = 0$ existuje $\delta > 0$ a spojitě diferencovatelná funkce $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ takové, aby

$$g(x) = [g(x)]^3 + 2e^{g(x)} \sin(x).$$

**Bonus:* Kolik těch funkcí existuje (pro $\delta > 0$ dostatečně malá)?

b) Pro interval $I \subseteq (-\delta, \delta)$ definujeme graf funkce $f : I \to \mathbb{R}$ přes

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

Dokažte, že pro každý kompaktní interval $I \subset (-\delta, \delta)$ a každou spojitou funkci $f : I \to \mathbb{R}$, graf $\mathrm{gr}(f)$ je kompaktní v $\mathbb{R}^2$. Co můžete říct o grafech $\mathrm{gr}(g)$ i $\mathrm{gr}(g')$ pro takové intervaly I? (Tip: uvažujte funkci $\Phi : I \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x) = (x, f(x))$. Jaké vlastnosti Φ má?)

c) Co můžete říct o monotonii fce g v $x = 0$?

Řešení. a) Definujme fci

$$F(x, y) = y^3 + 2e^y \sin(x) - y.$$

Zřejmě je F spojité. Pak hledáme $\delta > 0$ a fci $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ takové, aby $F(x, g(x)) = 0$ pro každé $|x| < \delta$. Zaprvé vidíme, že $F(0, 0) = 0$, tak bod našého zájmu bude $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Dále máme

$$\partial_x F = 2e^y \cos(x), \qquad \partial_y F = 3y^2 + 2e^y \sin(x) - 1,$$

a oboje parciální derivace jsou spojité (z toho vyplyne spojitě diferencovatelnost funkce g), a navíc $\partial_y F(0, 0) = -1 \neq 0$, tak podmínky IFT jsou splněné a proto existují $\delta > 0$ i g se všemi hledanými vlastnostmi.

**Bonus:* Pokud $x = 0$, pak

$$F(0, y) = y^3 - y = y(y^2 - 1).$$

Tzn. že body $y_0 \in \mathbb{R}$ kde $F(0, y_0) = 0$ jsou přesně $y_0 \in \{-1, 0, 1\}$. Dále platí $\partial_y F(0, \pm 1) = 2 \neq 0$ a podmínky IFT jsou splněné. Proto existují přesně tři takových funkcí g, podle toho, jakou hodnotu bodu y_0 jsme si na začátku zvolili.

b) Kvůli tomu, že f je spojité, totéž je fce Φ. To znamená, že obraz $\Phi[I]$ je kompaktní, protože totéž je I (obrazy kompaktních množin při spojitých funkcích jsou kompaktní). Pomocí IFT teď víme, že také g je spojité, a jelikož F je spojitě diferencovatelné, spojitost se transféruje na g'. Proto oboje $\mathrm{gr}(g)$ i $\mathrm{gr}(g')$ jsou kompaktní na kompaktních intervalech.

c) Zase pomocí IFT máme

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, g(x))}{\partial_2 F(x, g(x))} = -\frac{2e^{g(x)} \cos(x)}{3[g(x)]^2 + 2e^{g(x)} \sin(x) - 1}.$$

Tím pádem a protože $g(0) = 0$ máme $g'(0) = 2 > 0$ a g je (striktně) rostoucí v $x = 0$. (Kdybyste zvolili $y_0 = \pm 1$, pak $g'(0) = -e^{\pm 1}$ a proto ty funkce jsou striktně *klesající* v $x = 0$.)

Úkol 2 (Taylor ve víc dimenzích). *(2+1=3 body)*

Občas můžeme Taylorův polynom ve víc proměnných dostat jednodušší než vypočítat

$$T^n_{f;x_0}(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0) \cdot [H_f(x_0)(x - x_0)] + ...$$

a) Počítejte Taylorovy polynomy funkcí $\log(1 + x)$ a $\cos(x)$ kolem $x = 0$ až na druhý stupeň.

b) Usuzujte, že Taylorův polynom druhého stupně funkce

$$f(x, y, z) = (x + 1) \log(y + 1) \cos(z),$$

v bodě $x_0 = (0, 0, 0)$ je

$$T^2_{f;x_0}(x) = y + xy - \frac{1}{2}y^2.$$

Řešení. a) Nejdřív máme $\log(1) = 0$ a $\cos(0) = 1$. Pak $[\log(1 + x)]' = \frac{1}{1+x}$, $[\log(1 + x)]'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$ a $[\cos(x)]' = \sin(x)$, $[\cos(x)]'' = -\cos(x)$ a tedy

$$T^2_{\log(1+x);0}(x) = x - \frac{x^2}{2}, \qquad T^2_{\cos(x);0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

b) Součin Taylorových polynomů je zas Taylorův polynom, když mluvíme o stejném stupni. Proto najdeme blízko $(0, 0, 0)$

$$(x + 1) \log(1 + y) \cos(z) \approx (x + 1)(y - \frac{y^2}{2})(1 - \frac{z^2}{2}) = xy + y - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}z^2(x + 1)(y - \frac{y^2}{2}).$$

(Vyměnit první $\approx$ s $=$ *není* korektní (proč?).) Poslední člen tohoto součtu má stupeň aspoň 3, tak k $T^2_{f;x_0}$ nepatří. To samé platí pro třetí člen; proto najdeme, že doopravdy

$$T^2_{f;x_0}(x) = y + xy - \frac{1}{2}y^2.$$