Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 5

K odevzdání do čtvrtka, 13.11.25, 23:59 hod přes OWL

Explicitně implicitní

Úkol 1. *(3+2=5 bodů)*

Nechť je $F : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = ye^x - x\ln(y) - 1$ a bod $P = (0, 1)$.

a) Dokažte, že existuje funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, abychom mohli psát $y = g(x)$ v nějaké okolí bodu P. Dokažte též, že funkce g je spojitě diferencovatelná.

b) Počitejte $g'(x)$ i $g'(0)$.

Řešení. (Udělal jsem malou chybu v definičním oboru funkce F, kterouž jsem tady opravil.)

a) Nejdřív počítáme

$$\partial_y F = e^x - \frac{x}{y}$$

a vidíme, že $\partial_y F(0, 1) = 1 \neq 0$. Dále $\partial_x F = ye^x - \ln(y)$ a tedy oboje parciální derivace jsou spojité. Proto věta o implicítní funkci (anglicky implicit function theorem, IFT) nám říká, že existuje nějaké okolí U bodu P a funkce $g : U \to \mathbb{R}$ s $g(0) = 1$ takové, aby $F(x, g(x)) = 0$ pro každé $x \in U$ i, zase pomocí IFT, g je v U spojitě diferencovatelné.

b) Používejme řetězové pravidlo na $F(x, g(x)) = 0$ a najdeme

$$\partial_1 F(x, g(x)) + \partial_2 F(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

(tady jsem vyměnil ∂_x a ∂_y s ∂_1 a ∂_2, abych zdůraznil, že derivuji vzhledem k první a druhé proměnné). Přepsaní nám dává

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, g(x))}{\partial_2 F(x, g(x))}$$

a jmenovatel není nulový v U. Potom najdeme

$$g'(x) = -\frac{g(x)e^x - \ln(g(x))}{e^x - \frac{x}{g(x)}}$$

a tedy

$$g'(0) = -\frac{g(0)e^0 - \ln(g(0))}{e^0 - \frac{0}{g(0)}} = -1.$$

Úkol 2. *(2+2+1=5 bodů)*

Nechť je $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definována přes

$$F(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3 + 2z^2 - 3xyz.$$

a) Dokažte, že existuje okolí bodu $(x_0, y_0) = (1, -1)$ a funkce $g = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s $g(1, -1) = -1$ takové, aby $F(x, y, g(x, y)) = 0$ v tomto okolí.

b) Dokažte, že g má stacionární bod v $(1, -1)$. (Tip: parciální derivace v x i y a řetězové pravidlo.)

c) Počitejte tečnou rovinu funkce g v bodu $(1, -1)$. Dejte *geometrické* vysvětlení, proč váš výsledek není překvapený ("gradient je nula" jako geometrické neplatí).

Řešení. a) Počítáme obdobně jako dřív $F(1, -1, -1) = 1 + 1 - 1 + 2 - 3 = 0$ a

$$\begin{aligned}
\partial_x F &= 3x^2 - 3yz, \\
\partial_y F &= -3y^2 - 3xz, \\
\partial_z F &= 3z^2 + 4z - 3xy
\end{aligned}$$

a všechny parciální derivace jsou spojité. Dále $\partial_z F(1, -1, -1) = 2 \neq 0$ a proto IFT nám říká, že existuje okolí U bodu P i spojitě diferencovatelná funkce $g : U \to \mathbb{R}$ takové, aby $F(x, y, g(x, y)) = 0$.

b) Zase používáme řetězové pravidlo a máme

$$\begin{aligned}
\partial_x F(x, y, g(x, y)) = \partial_1 F(x, y, g(x, y,)) + \partial_3 F(x, y, g(x, y)) \cdot \partial_x g(x, y) = 0, \\
\partial_y F(x, y, g(x, y)) = \partial_2 F(x, y, g(x, y,)) + \partial_3 F(x, y, g(x, y)) \cdot \partial_y g(x, y) = 0,
\end{aligned}$$

proto můžeme napsat gradient $\nabla g = (\partial_x g, \partial_y g)$ jako

$$\begin{aligned}
\nabla g(x, y) &= -[\partial_3 F(x, y, g(x, y))]^{-1} \nabla_{(1,2)} F(x, y, g(x, y)) \\
&= -[3g(x, y)^2 + 4g(x, y) - 3xy]^{-1}(3x^2 - 3yg(x, y),\ -3y^2 - 3xg(x, y)),
\end{aligned}$$

kde $\nabla_{(1,2)}$ je derivace vzhledem k první a druhé proměnné funkce F. Další (možná jasnější) způsob to napsat je

$$\partial_x g(x, y) = -\frac{\partial_1 F(x, y, g(x, y))}{\partial_3 F(x, y, g(x, y))}, \qquad \partial_y g(x, y) = -\frac{\partial_2 F(x, y, g(x, y))}{\partial_3 F(x, y, g(x, y))}.$$

Abychom měli stacionární bod, musí platit $\nabla g = 0$, a tedy

$$\begin{aligned}
\nabla g(1, -1) &= -[3g(1, -1)^2 + 4g(1, -1) + 3]^{-1}(3 + 3g(1, -1),\ -3 - 3g(1, -1)) \\
&= -\frac{1}{2}(0, 0) = (0, 0),
\end{aligned}$$

tj., g má vskutku v bodě $(1, -1)$ stacionární bod.

c) Tečná rovina má rovnici

$$\tau_{g;P}(x, y) = g(P) + \nabla g(P) \cdot \Big((x, y) - P\Big).$$

Protože $\nabla g(P) = (0, 0)$, máme pouze

$$\tau_{g;P}(x, y) = g(P) = -1.$$

Tečná rovina je zejména paralelní k $x - y-$rovině. To není překvapené proto, že g má v P stacionární bod; tím pádem tečná rovina nesmí mít jakekoli sklon v tomto bodě, což není nic jiného než říct, že je paralelní k $x - y-$rovině.