Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 4

K odevzdání do čtvrtka, 06.11.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Kompaktnost). *(2+2=4 body)*

a) Nechť X je neprázdná množina a

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \neq y, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ukažte, že podmnožina $A \subset X$ je kompaktní právě, když je konečná. (Tip: mohli byste ukázat jeden směr přímo, druhý sporem.)

b) Ukažte, že konečné sjednocení kompaktních množin je zas kompaktní. Ukažte pomocí příkladu, že pro obecné (nekonečné) sjednocení to už neplatí.

Řešení. Prázdná množina zřejmě je kompaktní, proto předpokládáme od teď, že $A \neq \emptyset$.

a) $\Leftarrow$ Nechť je A konečné i $(x_n)_n$ posloupnost v A. Protože A je konečné, existuje aspoň jeden bod $a \in A$, který trefí nekonečně mnoho x_n. Zvolíme teď tuto (konstantní) podposloupnost a takto najdeme podposloupnost, která je (zřejmě) konvergentní; tedy A je kompaktní. (Poznámka: V tomto směru jsme nikde nepoužívali metriku d explicitně, a proto můžeme říct: každá konečná podmnožina každého metrického prostoru je kompaktní.)
$\Rightarrow$ Sporem: předpokládáme, že A je kompaktní, ale zároveň nekonečná. Pak můžeme vytvořit posloupnost $(x_n)_n$ v A takovou, že $x_n \neq x_m$ pro každé $n \neq m$. Kvůli tomu, že A je kompaktní, existuje konvergentní podposloupnost $(x_{n_k})_k$; teď ale každá konvergentní posloupnost v metrice d je od nějakého bodu konstantní, tj., existuje nějaké $K \geq 1$ takové, aby pro každé $k \geq K$ platilo $x_{n_k} = x_K$. To je spor s volbou posloupnosti; tedy A musí být konečné.

Poznámka: Všimněte si, že v této metrice *každá* podmnožina je uzavřená i omezená, ale jen *konečné* množiny jsou kompaktní. Porovnejte to s větou z lekce, která spoluje uzavřenost, omezenost a kompaktnost; co je v té větě zásadní předpoklad?

b) Nechť je $(U_i)_{i=1}^k$ konečně mnoho kompaktních množin a $A = \bigcup_{i=1}^k U_i$ jejich sjednocení, a nechť je $(x_n)_n$ posloupnost v A. Jelikož sjednocení (lepší říct, k) je konečné, musí existovat nějaké U_j takové, aby nekonečně mnoho členů posloupnosti $(x_n)_n$ leží v U_j. Teď ale je toto U_j kompaktní, a proto tyto nekonečně mnoho členů musí mít konvergentní podposloupnost, která zároveň je též podposloupnost celé posloupnosti $(x_n)_n$, se kterou jsme začali. Posloupnost $(x_n)_n$ tudíž má konvergentní podposloupnost v $U_j \subset A$; tedy je A kompaktní. Pro obecné sjednocení to neplatí, vezměme si např. $U_i = [-i, i]$ pro $i \in \mathbb{N}$, pak samozřejme každé U_i je kompaktní, ale jejich sjednocení $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i = \mathbb{R}$ není.

Jiný příklad by byl nekonečná množina X s metrikou d z úkolu 1. Pak každá jednobodová množina $\{x\}$ je kompaktní, protože je konečná, ale když vezmeme nekonečně mnoho $x_i \in X$, pak jejich sjednocení je nekonečné a proto není kompaktní.

Úkol 2 (Úplnost). *(1+2+3=6 bodů)*

a) Najděte příklad metrického prostoru (X, d) odlišný od úkolu c), který není úplný.

b) Ukažte nebo vyvraťte: Existuje neprázdná množina M taková, aby pro každou metriku d metrický prostor (M, d) nebyl úplný.

c) Už víme z lekce, že metrický prostor $(\mathbb{R}, |x - y|)$ je úplný metrický prostor. Tím úkolem chceme zdůraznit, že vlastnost úplnosti záleží na zvolené metrice:
Nechť je

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

Můžete bez důkazu použit, že tato funkce definuje metriku na $\mathbb{R}$. Ukažte, že prostor $(\mathbb{R}, d)$ není úplný. Tady $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je inverze funkce tan. (Tip: podívejte se na posloupnost $x_n = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.)

Řešení. a) Vezměme např. $(X, d) = (\mathbb{Q}, |x-y|)$. Už víme, že existuje posloupnost racionálních čísel $(q_n)_n$ konvergentní k $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

b) Tento výrok ne špatný. Nechť je $M \neq \emptyset$ a vezměme metriku z Úkolu 1, pak prostor (M, d) je úplný: Nechť je $(x_n)_n$ Cauchyovská poslpounost v (M, d), pak od nějakého bodu je konstantní (viz řešení části a) z úkolu 1). Proto limita už je člen posloupnosti a tedy bod v M; jinými slovy, každá Cauchyovská posloupnost konverguje v M, následně M je úplné (nezávisly na tom, jak přesně vypadá).

c) Posloupnost $x_n = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je Cauchyovská posloupnost v $(\mathbb{R}, d)$, která nekonverguje. Abychom to viděli, nechť $m, n \in \mathbb{N}$ takové, že $m > n$. Udržujeme n opevné a používáme spojitost funkcí $|\cdot|$ a arctan, máme

$$\lim_{m\to\infty} d(n, m) = |\arctan(n) - \frac{\pi}{2}|.$$

Zjištění limity vzhledem k n vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty} |\arctan(n) - \frac{\pi}{2}| = 0,$$

viz také úkol 1 b) z DÚ2 pro metriku $|x - y|$. Zejména to znamená:
Nechť je $\epsilon > 0$ libovolné, pak existuje nějaké $N \in \mathbb{N}$ takové, abychom pro každé $n \geq N$ měli

$$|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon.$$

Pro každé $m > n \geq N$ to teď znamená

$$d(n, m) \leq |\arctan(n) - \frac{\pi}{2}| + |\frac{\pi}{2} - \arctan(m)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

a tedy posloupnost je Cauchyovská. Avšak není konvergentní v $(\mathbb{R}, d)$ proto, že jediný smysl-úplný limitový bod by byl $+\infty$, ovšem samozřejmě $\infty \notin \mathbb{R}$; tím pádem metrický prostor není úplný.