DR. FLORIAN OSCHMANN

KARLOVA UNIVERZITA
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 3

K odevzdání do čtvrtka, 30.10.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Řetězové pravidlo a extréma). *(2+2+2=6 bodů)*

a) Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencovatelné. Ukažte, že pro $z = f(\frac{xy}{x^2+y^2})$ platí

$$x\partial_x z + y\partial_y z = 0.$$

b) Nechť je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencovatelné a $a \in \mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}$ jsou konstantní. Vypočítejte gradient funkce $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(\langle a, x\rangle + b)$. Tady notace $\langle a, x\rangle$ je skalární součin těch vektorů. Připomináme, že gradient je $\nabla g = (\partial_{x_1} g, ..., \partial_{x_n} g)$.

c) Nechť je

$$f(x, y) = (x - y - 1)^2.$$

Najděte všechny extréma a určete jejich typ (minimum/maximum/sedlový bod).

Řešení. a) Máme

$$\partial_x z = f'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\partial_y z = f'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\frac{x(x^2+y^2) - 2y^2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tedy

$$\begin{aligned} x\partial_x z + y\partial_y z &= f'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\left[x\frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{x(x^2+y^2) - 2y^2x}{(x^2+y^2)^2}\right] \\ &= f'\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)\frac{x^3y + xy^3 - 2x^3y + x^3y + xy^3 - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Existuje další pěkný důkaz beze zlomků: definujeme $u(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Pak pro každé $k \neq 0$ platí $u(kx, ky) = u(x, y)$. Udržujme (x, y) a definujme pro tyto (fixované) body funkci $g(k) = u(kx, ky)$. Ale $g(k) = u(kx, ky) = u(x, y)$, tak g je konstantní funkce proměnné k (protože (x, y) je fixovan). To znamená $g'(k) = 0$, kde derivace je vzhledem ke k. Teď používáme řetězové pravidlo:

$$0 = g'(k) = x\partial_x u(kx, ky) + y\partial_y u(kx, ky).$$

Pomocí této rovnice v $k = 1$ i faktu, že máme zas pomocí řetězového pravidla $x\partial_x z + y\partial_y z = f'(u)(x\partial_x u + y\partial_y u)$, dokažeme, co chceme.

b) Pomocí řetězového pravidla máme

$$\nabla g(x) = f'(\langle a, x\rangle + b)\nabla(\langle a, x\rangle + b) = f'(\langle a, x\rangle + b)\nabla\langle a, x\rangle,$$

protože b je konstantní a tedy $\nabla b = 0$. Navíc platí pro každé $i \in \{1, ..., n\}$

$$\partial_{x_i}\langle a, x\rangle = \partial_{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a_i,$$

tak máme $\nabla\langle a, x\rangle = a$ a proto

$$\nabla g(x) = f'(\langle a, x\rangle + b)a.$$

Všimněte si, že protože a je vektor, také pravá strana je též. Porovnejte to s jednodimenzím pravidlem $[f(ax+b)]' = af'(ax+b)$. (Poznámka: abychom to napsali stoprocentně správně, museli bychom psát $\nabla g(x) = f'(\langle a, x\rangle + b)a^T$, protože ∇g je řádkový vektor; jak jsem ale říkal ve cvičení, není na tom úplně všeobecný styl.)

c) Počítáme

$$\nabla f(x, y) = (2(x - y - 1), -2(x - y - 1))$$

a proto $\nabla f = 0$ právě tehdý, když $y = x + 1$. Kvůli tomu, že f je kvadrátické, zejména $f(x, y) \geq 0$ pro každý pár $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a $f(x, x+1) = 0$, všechny body tvaru $(x, x+1)$ jsou (globální) minima. (A, protože všechny body tvaru $(x, x+1)$ jsou jediné kritické body a všechny jsou minima, neexistují žádná maxima ani sedlové body.)

Úkol 2 (Derivace vyšších řádů). *(2+2=4 body)*

a) Vypočítejte pro následující funkci derivace až do druhého řádu:

$$f(x, y) = (x + y + 3)^2 - e^{2x+y^2}.$$

b) Pro vektorovou funkci $v = (v_1, v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definujeme divergenci a rotaci přes

$$\operatorname{div} v = \nabla \cdot v = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3,$$
$$\operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

(Tady $\partial_i v_j$ znamená $\partial v_j/\partial x_i$ pro každé $i, j \in \{1, 2, 3\}$.) Ukažte, že $\operatorname{div}\operatorname{rot} v = 0$.

Řešení. a) Máme

$$\partial_x f = 2(x + y + 3) - 2e^{2x+y^2}, \qquad \partial_y f = 2(x + y + 3) - 2ye^{2x+y^2},$$
$$\partial^2_{xy} f = 2 - 4ye^{2x+y^2} = \partial^2_{yx} f,$$
$$\partial^2_{xx} f = 2 - 4e^{2x+y^2}, \qquad \partial^2_{yy} f = 2 - 2e^{2x+y^2} - 4y^2e^{2x+y^2}.$$

Tady též vidíme $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$ podle Schwarzovy věty (všimněte si, že druhé smíšené derivace jsou spojité).

b) Počítání a přeuspořádání nám dávají

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{rot} v &= \partial_1(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) + \partial_2(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) + \partial_3(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \\ &= \partial^2_{12} v_3 - \partial^2_{21} v_3 + \partial^2_{23} v_1 - \partial^2_{32} v_1 + \partial^2_{31} v_2 - \partial^2_{13} v^2 = 0.\end{aligned}$$

Zejména tady jsme používali Schwarzovou větu, abychom viděli, že $\partial^2_{ij} v_k = \partial^2_{ji} v_k$. Obdobně bychom mohli dokázat, že $\operatorname{rot} \nabla f = 0$ pro každé (diferencovatelné) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Takové věci se hodně používají ve fyzice, hlavně když pracujete s magnetickými poli, a ve speciálních pádech platí i protisměr: pokud $v : U \to \mathbb{R}^3$ je funkce, kde $U \subset \mathbb{R}^3$ není "příliš špatné", a pokud $\operatorname{div} v = 0$, pak existuje nějaká vektorová funkce $w : U \to \mathbb{R}^3$ taková, aby platilo $v = \operatorname{rot} w$. Např. je magnetické pole B vžycky beze zdroje (neexistují magnetické monopole), tzn. právě $\operatorname{div} B = 0$, a pak existuje tzv. vektorový potenciál A takový, že $B = \operatorname{rot} A$. Tím následuje celá teorie magnetických polí, jak fungují hvězdy, atd.