Dr. Florian Oschmann

Karlova univerzita
Zimní semestr 2025/26

Matematická analyza II

Domácí úkol 2

K odevzdání do čtvrtka, 23.10.25, 23:59 hod přes OWL

Úkol 1 (Spojitost a uzavřenost). *(2+2+2=6 bodů)*

a) Definujeme funkci $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ přes

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Rozhodněte, zda tato funkce je spojitá, a jestli ji (ne)můžeme rozšířit jako spojitou funkci do celé $\mathbb{R}^2$. *(Tip: Můžete bez důkazu používat, že pro každé $x, y \neq 0$ platí $|xy|/(x^2+y^2) \leq 1$.)*

b) Nechť je (X,d) metrický prostor a $a \in X$. Ukažte, že funkce

$$f : X \to [0,\infty), \qquad f(x) = d(x,a)$$

je spojitá.

c) Nechť je (X,d) metrický prostor a $f : X \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Ukažte, že jádro (anglicky *kernel*)

$$\ker f := f^{-1}(\{0\})$$

je uzavřené v X. *(Připomínka: vzor množiny $A \subset \mathbb{R}$ je definován přes $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$.)*

Řešení. a) Mimo $(0,0)$ funkce je spojitá, protože je složená spojitých funkcí. V zajímavém bodě $(0,0)$ máme díky nerovnosti tipu, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0.$$

Tím pádem můžeme definovat

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

a tedy můžeme f rozšířit jako spojitou funkci do celé $\mathbb{R}^2$.

b) Proto, že d je metrika, platí trojúhelníková nerovnost, zajména

$$|d(x,a) - d(y,a)| \leq d(x,y)$$

pro libovolné $x, y \in X$, což je důsledek obvyklé nerovnosti

$$d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$$

a symetrie v (x, y). Nechť teď být $x \in X$ a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ být posloupnost konvergující k x, tj. $d(x, x_n) \to 0$ když $n \to \infty$. To ale znamená, že

$$|d(x,a) - d(x_n,a)| \le d(x,x_n) \to 0$$

a proto $d(x_n, a) \to d(x, a)$, což není nic jiného než spojitost funkce f. (V tomto příkladu platí i víc, zajména, že f je tzv. Lipschitzovsky spojité.) Mohli bychom tady také používat $\varepsilon - \delta$ kriterium, zkuste to napsat.

c) Nechť být $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost v ker$f$ konvergující k $x \in X$, zajména $f(x_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Máme dokázat, že také $x \in$ ker$f$, tj. $f(x) = 0$. Kvůli tomu, že f je spojité, najdeme

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{spojitost}{=} f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x),$$

a tím důkaz ukončíme. *Poznámka:* Tady jsme potřebovali (a implicitně předpokládali), že X je úplný, jinak by posloupnost (x_n) neměla limitu v X.

Ještě jednodušší důkaz používá topologii: Kvůli tomu, že f je spojité a $\{0\} \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina, jeji vzor $f^{-1}(\{0\})$ je též uzavřený. Tento důkaz funguje i bez předpokládu úplnosti.

Úkol 2 (Totální vs. parciální derivace). *(4 body)*

Dokažte, že funkce definována přes

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má totální diferenciál, ale parciální derivace jsou nespojité.

Řešení. Podle věty z lekce víme, že když funkce má parciální derivace a oni jsou spojité, pak tato funkce má i totální diferenciál. Mimo bod $(0, 0)$ počítáme

$$\begin{aligned} \partial_x f &= 2x \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \\ \partial_y f &= 2y \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

a tyto derivace jsou zřejmě spojité mimo $(0, 0)$, tedy f má mimo $(0, 0)$ i totální diferenciál. V bodě $(0, 0)$ musíme použit definici totálního diferenciálu, tedy máme najít $Df(0, 0)$ a $\mu(h)$ tak, aby platilo

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = Df(0,0)\cdot h + \mu(h), \qquad \lim_{h\to 0}\mu(h) = 0,$$

kde $h = (h_1, h_2)$ je vektor dost malé hodnoty. Volíme $Df(0, 0) = (0, 0)$ a $\mu(h) = f(h)$, pak

$$f(h_1,h_2) - f(0,0) = f(h_1,h_2), \qquad Df(0,0)\cdot h + \mu(h) = \mu(h),$$

a platí

$$|\lim_{h\to 0}\mu(h)| = \lim_{h\to 0}\left|(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right| \le \lim_{h\to 0}|h_1^2+h_2^2| = 0,$$

kde jsme používali, že absolutní hodnota je spojitá, že $|\sin| \leq 1$, a větu o dvou policajtech. (Stačilo by také, kdybychom dokázali, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - Df(0,0) \cdot h}{|h|} = 0,$$

tím pádem bychom měli odhad pouze na $\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Zkuste si to správně napsat.) Tím způsobem jsme ukázali, že opravdu Df existuje a navíc $Df(0,0) = (0,0)$, tak f má totální diferenciál všude v $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace nejsou spojité, jelikož pro $\partial_x f$ platí

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right) = - \lim_{x \to 0} \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

a poslední limita neexistuje. Obdobně to platí i pro $\partial_y f$ z důvodů symetrie (tady ale musíme vyměnit limity na $\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0}$, jinak by výsledek byl nula).

Upozornění: V tomto příkladu to doopravdy stačí se podívat na limity samostatně, tj. nejdřív $y \to 0$ a pak $x \to 0$, protože chceme dokázat, že něco spojité *není*. Tím pádem nám stačí jeden vyvolený směr, který tady je podél os. Kdybychom chtěli dokázat, že něco spojité *je*, tak by to nestačilo, viz příklad první lekce.

Navíc je nutné říct, že být spojité a mít všechny parciální derivace NENÍ to samé jako spojité parciální derivace, což znamená, že parciální derivace musí být spojité. Opravdu funkce nahoře je takový příklad: je spojitá (dokažte nebo používáte větu, že totalně diferenciabilní funkce je spojitá) i má všechny parciální derivace, oni ale spojité *nejsou*.