

Analýza I

Sbírka problémů

Obsah

1	Porozumění	1
2	Úvod	2
2.1	Středoškolská matika	2
2.2	Logika	2
2.3	Indukce	3
2.4	Metody důkazů	5
2.5	Infima, suprema	6
2.6	Mohutnosti množin	6
3	Limity posloupností	7
3.1	Počítání	7
3.2	Důkazy a porozumění	8
3.3	Celá část, hromadné body, limsup, liminf	9
4	Funkce	10
4.1	Limity funkcí	10
4.2	Spojitosť	11
4.3	Diferencovatelnost	14
4.4	l'Hospitalovo pravidlo	15

Upozornění: Pro nás vždycky platí $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

1 Porozumění

Úkol 1. (*Tento úkol budu updatovat podle toho, co se během semestru naučíme.*)

Rozhodněte, zda následující výroky jsou pravdivé. Pokud nejsou, upravte je.

a) Platí-li $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pak platí též $x - y \notin \mathbb{Q}$.

- b) Pro každá $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$ existuje $q \in \mathbb{N}$ takové, že $r < \frac{2}{q} < s$.
- c) Konverguje $(a_n)_n$, pak je $(a_n)_n$ omezená.
- d) Platí-li $0 \leq a_n \leq K$ a $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tak $a_n \rightarrow K$.
- e) Pro každou posloupnost platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2$.
- f) Součet/součin/rozdí/podíl divergentních posloupností je konvergentní/divergentní.
- g) Platí-li $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, tak platí buď $x_n \rightarrow 0$ nebo $y_n \rightarrow 0$ (nebo oboje).
- h) Je-li $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitý, pak $\exists \max_{\mathbb{R}} f, \min_{\mathbb{R}} f$.
- i) Je-li $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitý, pak je f diferencovatelný.
- j) Je-li $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b]$ diferencovatelný, pak je f spojitý.
- k) Je-li f všude nespojitý, pak to samé platí pro f^2 .

2 Úvod

2.1 Středoškolská matika

Úkol 2.

- a) Vyřešte $||x - 3| - 2| = 1$, $\sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x^2 + 3x - 4}$, a $\sqrt{x - 2} - \sqrt{x - 5} = 1$.
- b) Najděte definiční obor funkcí $f(x) = \frac{x-2}{1+\sqrt{3x-5}}$ a $\log(x^2 - 2x - 3)$.
- c) Najděte inverzní funkci pro $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Najděte i definiční obor D_f a obor hodnot H_f .
- d) (Alenka v říši divů, Tydlidum a Tydlidýn) Alenka potkává Tydliduma a Tydlidýna. Oni mají malý stavební kamen, na kterém jsou délka, výška a šířka prvočísla (v milimetrech). Vedle něj stojí láhev nápisem “83-Pij mě”. Alenka si není jistá, tak na kamen trochu nakape, a ten se rozpíná na 83-násobek svého původního objemu. Tydlidum říká: “83 je totiž v matice důležitě důležité číslo”, a Tydlidýn dodává: “Každý přece ví, že objem kvádrů je 83-krát součtu jeho délky, šířky a výšky.” Samozřejmě my víme, že jsou to kecy, ale jen pro radost předpokládáme, že by to bylo pravda. Jaké jsou míry a objem stavebního kamenu? (Z časopisu “Bild der Wissenschaft”, Srpen 2026. Tento úkol je první krok směrem Hypotézy prvočíselných dvojic a Dicksonovy hypotézy.)

2.2 Logika

Úkol 3.

Doplňte následující tabulky výroků. Pak najděte ekvivalence, např. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ atd.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
1	1									
0	1									
1	0									
0	0									

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
1	1							
0	1							
1	0							
0	0							

Úkol 4.

Dokažte následující ekvivalence:

- a) $(\neg A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$
- b) $[A \vee (B \Rightarrow C)] \Leftrightarrow [C \vee (B \Rightarrow A)]$
- c) $[\nexists x : A(x) \Rightarrow B(x)] \Leftrightarrow [\forall x : A(x) \wedge \neg B(x)]$
- d) $[p \Rightarrow \neg p] \Leftrightarrow \neg p$
- e) Měsíc je zelený $\Leftrightarrow$ Měsíc je fialový $\Leftrightarrow 2 = 1 \Leftrightarrow$ Rok má 15 měsíců.

Úkol 5.

Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

- a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 0$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N} : [(y \leq x) \wedge (y + 1 > x)]$
- c) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \varepsilon$
- d) $\exists m \in \mathbb{N} : m \text{ liché} \Rightarrow m^2 \text{ liché.}$
- e) (Don't drink and drive) $\Leftrightarrow$ Don't (drink and drive)

Úkol 6.

Dokažte, že $\exists x \in \mathbb{Z} : x + 2 = 3x - 4$, a že $\exists x, y \in \mathbb{Z} : (2x - 3y = 8) \wedge (x + y + 1 = 0)$.

2.3 Indukce

Úkol 7.

- a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

i)

$$\prod_{k=2}^n (1 - k^{-2}) = (1 - 2^{-2})(1 - 3^{-2}) \cdots (1 - n^{-2}) = \frac{n+1}{2n}$$

ii)

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

- iii) $(1+x)^n \geq 1+nx$ pro každé $x > -1$ (Bernoulliho nerovnost).
- iv) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Tady je $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ a $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ a $0! = 1$.
- v) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ (Binomická věta).
- vi) $\prod_{k=0}^n \frac{k!}{(n-k)!} = 1$.
- vii) $x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$.

b) Dokažte

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1)$$

Potom najděte výroky pro

$$\sum_{k=1}^n 2k-1, \quad \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$$

a dokažte je.

c) Dokažte Nikómachovou větou

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2.$$

Co to znamená geometricky?

- d) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^3 - n$ dělitelné 3, a že $9^n - 1$ je dělitelné 8.
- e) Na herním večeru máme-li dvě hry, ze kterých se první hra hraje přesně se třemi lidmi, druhá se přesně pěti lidmi. Dokažte, že pro každé číslo účastníků $n \geq 8$, každý člověk může hrát. Máme-li tři hry, ze kterých se hraje první se třemi, druhý se čtyřmi, a třetí se sedmi lidmi, tak najdeme místo pro každé $n \geq 14$ účastníků. (Úkol k notaci: napište tvrzení logickými kvantifikátory.)
- f) Necht je $n \in \mathbb{N}$. Kolik párů (dublet) $(k_1, k_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existuje, aby $k_1 + k_2 = n$?
- g) Kolik tripletů (k_1, k_2, k_3) existuje tak, aby $k_1 + k_2 + k_3 = n$? (Tip: Používejte předchozí úkol, a odpovězte nejdřív následující otázku: Necht $k \leq n$ je přirozené číslo. Kolik máme možností rozdělit $n - k$ prvků do dvou skupin?) Můžete i najít výrok pro

$$\# \left\{ (k_1, k_2, \dots, k_N) \in \mathbb{N}^N : \sum_{i=1}^N k_i = n \right\}, \text{ kde } N \in \mathbb{N}?$$

- h) Najděte v následujícím “důkazu” chybu a upravte ji:
Součet prvních sudých čísel se rovná $n(n+1)+2$. Dokažme to indukcí: Necht $\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)+2$. Pak

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} 2k &= \sum_{k=1}^n 2k + 2(n+1) = n(n+1) + 2 + 2(n+1) \\ &= n^2 + 3n + 4 = (n+1)((n+1)+1) + 2. \end{aligned}$$

Principem matematické indukce dokončíme důkaz, avšak pro $n=2$ máme $2+4=6 \neq 2 \cdot 3 + 2$. Vysvětlete taky, proč ten důkaz není v rozporu se vzorem $A \Rightarrow B \Rightarrow \dots \Rightarrow C$.

2.4 Metody důkazů

Úkol 8.

- a) Dokažte nebo vyvratte: Je-li $x \in \mathbb{R}$ a $y \notin \mathbb{Q}$, pak $x + y \notin \mathbb{Q}$.
- b) Dokažte, že následující čísla jsou iracionální: $\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2}$, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- c) Dokažte, že pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ a $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
- d) Dokažte, že $x^2 = |x|^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.
- e) Je-li $m^2 \in \mathbb{N}$ sudé, pak je m taky sudé.
- f) Dokažte, že pro každá $a, b > 0$ platí

$$\min(a, b) \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a, b),$$

- g) (těžší) Dokažte nerovnost aritmetického a geometrického průměru: pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

(Existuje hodně důkazů, viz (anglickou) Wikipedii, já vám dám tři návody k indukci:

Důkaz 1) Bez újmy na obecnosti (BÚNO) $a_{n+1} = \max_{k=1, \dots, n+1} \{a_k\}$. Dokažte

$$\alpha := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq \max_{k=1, \dots, n} \{a_k\} \leq a_{n+1},$$

a definujte si $x = (a_{n+1} - \alpha)/((n+1)\alpha)$. Pak se podívejte na $(\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{(n+1)\alpha})^{n+1}$ a používejte Bernoulliho nerovnost.

Důkaz 2) Dokažte, že z tvrzení pro n vyplýne tvrzení pro $2n$ (tzv. indukce dopředu). Pak dokažte pomocí α a rozšíření posloupnosti, že z tvrzení pro n vyplýne tvrzení pro $n-1$ (indukce dozadu).

Důkaz 3) Dokažte indukci, že pro $u_i > 0$ a $\prod_{i=1}^n u_i = 1$ platí $\sum_{i=1}^n u_i \geq n$. Pak to používejte pro $p = \prod_{i=1}^n a_i$ a $u_i = a_i / \sqrt[n]{p}$.

- h) Necht jsou A, B, C množiny. Dokažte $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ a $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (De Morganovy zákony; porovnejte s Úkolem 3).
- i) Necht jsou A, B množiny. Dokažte $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$ a $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ (absorpční vlastnost).
- j) Dokažte, že $\forall x \in \mathbb{R} : [x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow x > 0]$. Použijte tři metody (přímou, nepřímou, sporem).
- k) Necht je $f : X \rightarrow Y$ zobrazení a $A, B \subset Y$. Dokažte $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ a $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$. (Tady f^{-1} není inverzní funkce, nýbrž vzor.)
- l) Necht je $f : X \rightarrow Y$ zobrazení a $A, B \subset X$. Rozhodněte, zda platí $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$. Pokud něco neplatí, dejte protipříklad a rozhodněte, jestli platí aspoň jedna inkluze $\subset$ nebo $\supset$.
- m) Najděte v následujícím “důkazu” chybu a upravte ji:
Zřejmě platí $\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 \frac{1}{2}$, a $2 < 4$. Tedy $2 \log_2 \frac{1}{2} < 4 \log_2 \frac{1}{2}$. Použijeme $a \log_2 x = \log_2 x^a$, dostaneme $\log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4$. Funkce $\log$ je rostoucí a tedy $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^4$, z něj usuzujeme, že $16 < 4$.
Najděte i místo, odkud ten důkaz není v rozporu se vzorem $A \Rightarrow B \Rightarrow \dots \Rightarrow C$.

2.5 Infima, suprema

Úkol 9.

a) Najděte pro následující množiny $\sup$, $\inf$, $\min$ a $\max$, pokud existují.

$$M_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}, \quad M_2 = [0, 1), \quad M_3 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 2\},$$
$$M_4 = \left\{ \frac{p}{p+q} : p, q \in \mathbb{N} \right\}, \quad M_5 = \mathbb{Q} \cap (1, 2).$$

b) Nechtě jsou $A, B \subset \mathbb{R}$ neprázdné množiny a $s_A = \sup A$, $s_B = \sup B$, $i_A = \inf A$, $i_B = \inf B$ existují. Co se lze obecně říct o supremu a infimu množin $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$?

c) Najděte příklad množiny, která má supremum/infimum, ale nemá maximum/minimum.

2.6 Mohutnosti množin

Tady definujeme pro množinu A množina všech podmnožin (tzv. potenční množina) jako $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$.

Úkol 10.

a) Napište $\mathcal{P}(A)$ pro $A = \{1, 2\}$ a $A = \{1, 3, 7\}$. Co se lze říci o jejich mohutnostech?

b) Porovnejte mohutnosti následujících množin: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, [0, 1], (0, 1), [0, 1)$, $K = \{\text{množina konečných podmnožin } \mathbb{N}\}$. Najděte bijekci $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$?
(*Zajímavost:* Každé kladné racionální číslo je členem rekursivní posloupnosti (tzv. *Calkin-Wilfův strom*))

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2[a_n] - a_n + 1}.$$

K definici $[x]$ viz (2). Sestrojte s touto informací posloupnost b_n , ve které je *každé*, tedy i záporné, racionální číslo.)

c) (Hilbertův hotel) Pan D. Hilbert vede hotel s nekonečným počtem pokojů. Hotel je plně obsazen. Jednoho dne přijde další host a chce pokoj. Naštěstí je pan Hilbert matematik a říká: “Není vůbec problém. Host v pokoji č. 1 se přestěhuje do pokoje 2, host v pokoji 2 do pokoje 3 atd. Pak pokoj č. 1 je volný pro vás.” Řečeno a uděláno. Druhý den přijede autobus s nekonečným počtem lidí, kteří chtějí všichni pokoj. Jak byste to udělali? Třetí den přijede nekonečný počet takových autobusů. Jak to tentokrát uděláte, aby všichni mají pokoj a hotel je zas plně obsazen? Můžete jim dát pokoje i tak, že máte ještě nekonečně mnoho volných pokojů?

d) Nechtě má X stejnou mohutnost jako Y , a Y stejnou mohutnost jako Z . Dokažte, že X má stejnou mohutnost jako Z .

e) Dokažte, že množina všech posloupností nul a jedniček má stejnou mohutnost jako $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, a že $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ má stejnou mohutnost jako množina všech posloupností přirozených čísel. Co to nám říká vzhledem k předchozímu úkolu?

f) Dokažte:

- i) Podmnožina spočetné množiny je spočetná.
- ii) Necht jsou X, Y spočetné, pak $X \cup Y$ je spočetná.
- iii) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.
- g) (těžší) Definujme si podmnožiny intervalu $[0, 1]$ jak následuje: $C_0 = [0, 1]$, $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, C_{i+1} obsahuje všechny intervaly množiny C_i , z nich odstraníme každou prostřední třetinu. Necht je $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$, a necht A je množina všech (nekonečných) posloupností nul a jedniček. Najděte bijekci mezi A a C . Je C spočetné? (Může pomáhat skica.)
- h) (těžší) Dokažte, že pro konečné množiny platí $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$ (tady je $\#M$ mohutnost množiny M). Dokažte taky Cantorovou větu: Pro každou (i nekonečnou) množinu platí $\#M < \#\mathcal{P}(M)$ (Návod: zřejmě $\#M \leq \#\mathcal{P}(M)$. Je-li surjekce $f : M \rightarrow \mathcal{P}(M)$, definujme si $A = \{x \in M : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(M)$. Pak je $a \in M$ s $f(a) = A$, spor.)

3 Limity posloupností

3.1 Počítání

Úkol 11.

- a) Necht je $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Najděte číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \geq n_0$ platilo $|a_n - 1| \leq 0.01$. Existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, abychom pro každé $n \geq n_1$ měli $|a_n - 2| \leq 0.01$?
- b) Spočtěte limity podle definice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k^2, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(2m)}$$

- c) Za užití věty o aritmetice limit spočtěte limity následujících posloupností:

$$\frac{n^2 + 5n - 2}{3n^2 - 15}, \quad \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right), \quad \frac{n}{2^n}, \quad -n^7 + 3n^2 - \frac{6}{n + 1},$$

$$\frac{2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}, \quad \frac{(n + 2)! + (n + 1)!}{(n + 2)! - (n + 1)!}, \quad \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

- d) Pomocí rovnice (1) najděte limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n 2k - 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 1}{n^4 + 1} \sum_{k=1}^n (2k - 1)^2.$$

- e) Spočtěte libovolným způsobem limity následujících posloupností.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad \sqrt[n]{2^n + 4^n}, \quad \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$$

$$\frac{(5n+1)(2n^2+3)}{6n^3}, \quad \frac{3^n - 5^n}{2 \cdot 5^n}, \quad \frac{10^{1/n} + n^2}{5^{3 \log_5 n}}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}, \quad \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

- f) Pro jaké $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 0$ konverguje $a_n = (\frac{p^2+1}{8+6p})^n$ k nule?

g) Spočítejte limity pro (tady $a, b, c > 0$):

$$\begin{aligned} & \frac{1000^n}{n!}, & \sqrt[n]{n}, & \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{a^{2n} + b^{2n}}}, & \frac{n^{\frac{2}{3}} \sin(n!)}{n+1}, \\ & \sin(\pi\sqrt{n^2+1}), & \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right), & \begin{cases} \frac{1}{n^2} + 1 & \text{pro } n \in 2\mathbb{N}, \\ \frac{n^2-2n+3}{n^2-2} & \text{pro } n \in 2\mathbb{N}-1, \end{cases} & \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \\ & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}, & \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n, & \left(1 + \frac{1}{n + \cos(2n)}\right)^n, & \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2-1} \end{aligned}$$

(Tip na $\sqrt[n]{n}$: Binomická věta a $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$.)

h) Dokažte, že následující limity existují. Pak je spočítejte.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ kde } a_1 = 10, a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, & \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_{n\text{-krát}}, \\ & a_1 > 0, A > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{A}{a_n} \right), & a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}, \\ & a_1 = \sqrt{c}, a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}, \text{ kde je } c \geq 0, & 0 \leq a \leq 1, a_1 = 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(a - a_n^2). \end{aligned}$$

i) Nechť je $a_1 = 1$ a

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n.$$

Dokažte, že posloupnost má přímý výrok $a_n = \frac{1}{n}$ (Tip: indukce).

j) Nechť jsou $a_1 = a, a_2 = b$ s reálnými čísly $a, b \in \mathbb{R}$, a nechť je

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Najděte přímý výrok pro a_n (Tip: podívejte se na $a_{n+1} - a_n$).

k) (první krok ke spojitosti) Je-li $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, pak pro každé $K \in \mathbb{N}$ a polynom $P(x) = c_0 + \sum_{k=1}^K c_k x^k$ s $c_k \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n) = P(a)$. (Návod: dokažte $a_n^k \rightarrow a^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a používejte algebru limit)

l) (těžší) Nechť je $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Najděte limitu posloupnosti $b_n := a_{n+1}/a_n$. (Tip: Rozlište mezi sudými a lichými indexy.) Najděte taky limitu posloupnosti $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$ a $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$, a porovnejte limity.

3.2 Důkazy a porozumění

Úkol 12.

a) Nechť $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a nechť je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Definujme

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Dokažte, že je taky $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. Navíc dějte příklad, kde posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ne*konverguje, avšak $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje (s důkazem).

- b) Dokažte nebo vyvratte: Je-li $a_n \rightarrow a$, pak taky $|a_n| \rightarrow |a|$. Je-li $|a_n| \rightarrow |a|$, pak $a_n \rightarrow a$.
- c) Nechť je x_n konvergentní a y_n divergentní. Platí, že posloupnosti $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$ jsou konvergentní/divergentní? Důkaz nebo protipříklad.
- d) Nechť $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, jestli platí následující výroky:
- $a \leq b \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n$
 - $a \leq b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \leq b_n$
 - $a_n < b_n \Rightarrow a < b$
- e) Dokažte: Nechť jsou $(a_{n_k})_k$ a $(a_{m_k})_k$ podposloupnosti posloupnosti $(a_n)_k$. Platí-li pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď $n = n_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ nebo $n = m_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, a platí-li $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{m_k} = a \in \mathbb{R}$, pak taky platí $a_n \rightarrow a$. Co se stane, pokud máme tři/čtyři/ $K \in \mathbb{N}$ takových podposloupností?
- f) Sestrojte posloupnost a_n takovou, že existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, aby pro každé $k \in \mathbb{N}$ platilo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k \cdot n} = a$, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ neexistuje. Proč to není spor s předchozím úkolem?
- g) Nechť je $(a_n)_n$ konvergentní posloupnost s $a_n \in \mathbb{Z}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokažte dvěma důkazy, že $(a_n)_n$ je skoro konstantní, tj., existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, aby pro každé $n \geq N$ platilo $a_n = a_N$. (Úkol k notaci: napište toto tvrzení logickými kvantifikátory.)
- h) Rozhodněte, zda jeden z následujících výroků implikuje druhý. Každou implikaci buď dokažte, nebo najděte protipříklad.
- Posloupnost $(a_n)_n$ je omezená.
 - Existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n, m \in \mathbb{N}$ a $n \geq m$ platí $|a_n - a_m| \leq K$.
- i) Dokažte, že pro libovolné $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ platí

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Co se lze říci o limitě této posloupnosti pro $n \rightarrow \infty$?

- j) (jednoduchá Banachova věta) Nechť je $(a_n)_n$ libovolná posloupnost s

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}|.$$

Dokažte, že $(a_n)_n$ konverguje. Co se stane, pokud vyměníme $\frac{1}{2}$ na $0 < q < 1$? Můžete i najít rychlost konvergence, tj., odhad jako je např. $|a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n| \leq \frac{1}{n}$?

- k) (těžší) Dokažte, že existuje limita posloupnosti $a_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \log n$. Co nám to říká o limitě harmonické řady $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$? (Návod: Platí $\exp(1/(1+n)) < 1 + (1/n) < \exp(1/n)$ a definujte $\alpha_n = \sum_{k=1}^n k^{-1} - \log n$, $\beta_n = \sum_{k=1}^n k^{-1} - \log(n+1)$. Potom dokažte $\alpha_n \geq \alpha_{n+1} \geq \beta_{n+1} \geq \beta_n$ a $\alpha_n - \beta_n \rightarrow 0$. Limita $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ se lze spočítat jen numericky.)

3.3 Celá část, hromadné body, limsup, liminf

Celá část čísla $x \in \mathbb{R}$ je¹

$$\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}. \quad (2)$$

Tedy máme $\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\lfloor 2.99 \rfloor = 2$, $\lfloor -2.001 \rfloor = -3$ atd.

¹Občas se píše i $[x] = \lfloor x \rfloor$, však existuje i $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, proto používám tady tuto notaci.

Úkol 13.

a) Dokažte, že platí

$$x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1.$$

Kdy platí rovnost?

b) Desetinný rozvoj čísla $x \in \mathbb{R}$ je $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Necht $a_n = \{nx\}$. Dokažte, že:

i) Je-li x celé, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

ii) (těžší) Je-li $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ a $x = r/s$, pak jsou hromadné body přesně $0, \frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{s-1}{s}$.

Úkol 14 (Těžší úkol o hustotě).

Necht jsou $\theta \in \mathbb{R}$ a $t \in \mathbb{N}$. Pak existují $p_t, q_t \in \mathbb{Z}$ tak, že $|q_t \theta - p_t| < \frac{1}{t}$. Přitom $0 < q_t \leq t$. Je-li navíc $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, potom $\lim_{t \rightarrow \infty} q_t = \infty$. (Návod: Necht je $k = 0, 1, \dots, t$. V jakém intervalu délky $1/t$ pak leží $x_k = \{k\theta\}$?)

Úkol 15.

a) Najděte hromadné body následujících posloupností. Případně najděte i limitu.

$$(-1)^n, \quad \sin(n\pi), \quad n, \quad \frac{1 + (-1)^n}{n}, \quad \frac{1 + (-1)^n}{n^2}, \quad \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}}, \quad \frac{\lfloor \frac{1+\sqrt{n}}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}.$$

b) Sestrojte posloupnost takovou, aby množina hromadných bodů $H((a_n)_n)$ byla

$$\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad \{0, 1, 3\}, \quad (\text{těžší}) [0, 1], \quad [0, \infty].$$

c) Existuje posloupnost, aby množina hromadných bodů byla $H((a_n)_n) = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, nebo $\mathbb{N}$?

d) Najděte limes superior a inferior a hromadné body:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right), \quad \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad 1 + \frac{n}{n+1} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

4 Funkce

4.1 Limity funkcí

Úkol 16.

Spočtěte limity (tady $m, n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\lfloor x \rfloor}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \left(\left(\sum_{k=1}^n x^k \right) - n \right), & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + 2^x)}{x}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{2x - 1} \right)^{x^2} \end{aligned}$$

Úkol 17.

Spočtete limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x\sqrt{x}}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(mx)}{\sin(nx)} \text{ pro } m, n \in \mathbb{N}$$

Úkol 18.

a) Dokažte, že

$$\liminf_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \geq \liminf_{x \rightarrow a} f(x) + \liminf_{x \rightarrow a} g(x),$$

$$\limsup_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x \rightarrow a} f(x) + \limsup_{x \rightarrow a} g(x)$$

b) Dokažte: $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x)$.

Úkol 19.

Nechť jsou $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkce. Dokažte nebo vyvráťte:

- a) f, g omezené $\Rightarrow f \cdot g$ omezené
- b) $f \cdot g$ omezené $\Rightarrow f$ a/nebo g omezené
- c) f, g shora/zdola omezené $\Rightarrow f \cdot g$ shora/zdola omezené
- d) f, g rostoucí $\Rightarrow f \cdot g$ rostoucí

Úkol 20 (Těžší).

Sestrojte bijekci $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, která nikde není monotónní. Sestrojte z toho bijekci $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ se stejnou vlastností.

4.2 Spojitost**Úkol 21.**

- a) Dokažte podle definice, že funkce $f(x) = 2x^2 - 1$ a $g(x) = \frac{3x^2 - 4}{x}$ jsou na svém definičním oboru spojité.
- b) Funkce $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá přesně pro $x \notin \mathbb{Z}$.

Úkol 22.

Jaké z následujících funkcí jsou na svém definičním oboru spojité? Jaké mají definiční obory?

$$\begin{array}{ccc}
 x^2 + 2x + 6, & \frac{1}{1+x^2}, & \frac{1}{1+x^3}, \\
 \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \leq 0, \\ x+2 & \text{pro } x > 0, \end{cases} & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{pro } x < -1, \\ (x+1)^2 & \text{pro } -1 \leq x < 0, \\ e^x & \text{pro } x \geq 0, \end{cases} & \begin{cases} 1 & \text{pro } x \leq 0, \\ 1-x & \text{pro } x > 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Úkol 23.

Nechť je

$$\text{cikcak}(x) = \left| \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor - x \right|.$$

Nakreslete funkci a dokažte, že:

- a) cikcak je 1-periodický, tj., $\text{cikcak}(x+1) = \text{cikcak}(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.
- b) cikcak je spojitý na $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$.
- c) cikcak je spojitý v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$. Usuzujte, že funkce je taky spojitá na celé $\mathbb{R}$.

Úkol 24.

- a) Nechť je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ omezené. Pak je $g(x) = x \cdot f(x)$ spojitý v $x = 0$.
- b) Funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

je spojitá přesně v bodě $x_0 = 0$.

- c) Nechť je $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ libovolná funkce. Pak je f spojitý.
- d) Nechť jsou $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitý. Platí-li $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$, pak už platí $f \equiv g$, tj., $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in [a, b]$.

Úkol 25.

- a) (jednoduchá Brouwerova/Schauderova věta) Nechť je $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ spojitý. Dokažte, že existuje *pevný bod* (*fixed point*), tj., je $x \in [a, b]$ takové, že $f(x) = x$. Je x jednoznačné?
- b) Nechť jsou $A, B \subset \mathbb{R}$ a $f_A : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_B : B \rightarrow \mathbb{R}$ spojitý s $f_A(x) = f_B(x)$ na $A \cap B$. Dokažte, že funkce

$$f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{pro } x \in A, \\ f_B(x) & \text{pro } x \in B, \end{cases}$$

je spojitá.

Úkol 26 (Těžší).

Dokažte, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ nesoudělná,} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

je spojitá přesně na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Úkol 27 (Těžší).

Dokažte, že funkce

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < \sqrt{2}, \\ 1 & \text{pro } x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

je na svém definičním oboru spojitá.

Úkol 28.

Nechť je

$$f_{m,n}(x) = \cos^{2n}(m!\pi x).$$

Dokažte, že $f_{m,n}$ je pro každá $m, n \in \mathbb{N}$ spojitá, a že

$$f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{m,n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q|m!, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a že

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Je $f(x)$ (aspoň někde) spojitá?

Úkol 29.

a) Nechť je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Pak platí

$$f([a, b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f].$$

Obzvlášť je obraz (uzavřeného) intervalu při spojitě funkci zas (uzavřený) interval.

b) Najděte příklad intervalu I a funkce $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tak, aby $f(I)$ nebylo uzavřený. Může f být spojitá? Může I být uzavřený a f prosté?

c) Nechť je $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá. Pak je f prosté právě když je ryze monotónní.

d) Nechť je $A \subset \mathbb{R}$ a definujme si distanci

$$\text{dist}(x, A) = \inf\{|x - y| : y \in A\}.$$

i) Dokažte, že $\text{dist} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ je spojitá.

ii) Je-li $A = [a, b]$ uzavřený interval a $B = [c, d]$ s $A \cap B = \emptyset$, pak

$$\min_{x \in B} \text{dist}(x, A) > 0.$$

(Proč $\min$ vůbec existuje?) Nalezněte i příklad neuzavřených intervalů/množin A, B tak, aby $\min_{x \in B} \text{dist}(x, A) = 0$.

4.3 Diferencovatelnost

Úkol 30.

Derivujte následující funkce a najděte definiční obory funkce a derivace:

$$\begin{array}{llll} x^2 + 3x - 5, & \frac{\log(1+x)}{x^2}, & x^2 e^{-x^2}, & x^x, \\ \log(|\log \sin x|), & \arccos(1-x^2), & \lfloor x \rfloor \sin^2(\pi x), & 2^{\tan \frac{1}{x}} \end{array}$$

Úkol 31.

Dokažte, že pro každé $x \neq 0$ platí

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x),$$

a že pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Úkol 32.

Dokažte, že

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je všude diferencovatelné. Je f' spojitý?

Úkol 33.

Najděte $a, b \in \mathbb{R}$ takové, aby funkce byla diferencovatelná všude na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{pro } x \leq -1, \\ ax^3 + x + 2b & \text{pro } x > -1. \end{cases}$$

Úkol 34.

- a) Necht jsou $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferencovatelné s $f(x) \cdot g(x) = x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Platí-li $f(0) = 0$, pak $g(0) \neq 0$. Sestrojte navíc příklad, že bez podmínky diferencovatelnosti, tvrzení neplatí.
- b) Necht je $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ (ryze) rostoucí a diferencovatelné. Platí pak $f'(0) > 0$?
- c) Necht je $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ rostoucí a spojitá. Existuje pak $f'(0)$?
- d) Platí-li $f(x) = f(-x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak platí $f'(-x) = -f'(x)$.

Úkol 35.

Zopakujme si posloupnost

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n}.$$

Už víme, že pro $a = \sqrt{2}$ konverguje. Co se stane pro $a \in (0, 4)$, $a = 4$, $a > 4$? (Tip: podívejte se na funkci $f(x) = 2^{\frac{x}{2}} - x$.)

Úkol 36.

Dokažte, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad |\tan x - \tan y| \geq |x - y| \quad \left(x, y \notin (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Úkol 37 (První příklad diferenciální rovnice).

Nechť je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrát spojitě diferencovatelné s $f(x) + f''(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

- a) Je-li $f(0) = f'(0) = 0$, pak zmizí f všude, tj., $f \equiv 0$. (Tip: podívejte se na $(f(x))^2 + (f'(x))^2$.)
b) Bez předcházející podmínky zmizí $g(x) = f(x) - f(0) \cos x - f'(0) \sin x$ všude.

Poznámka: Tím úkolem jsme dokázali, že pokud $f + f'' = 0$, pak (jednoznačně!) řešení je $f(x) = f(0) \cos x + f'(0) \sin x$.

Úkol 38 (Těžší).

Dokažte pomocí indukce, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ funkce $f(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^n |x|$ je n -krát, ale ne $(n+1)$ -krát diferencovatelná, a že pro její derivace platí

$$f^{(k)}(x) = \frac{x^{n-k}|x|}{(n-k+1)!}.$$

Kolikrát je f^2 diferencovatelné?

4.4 l'Hospitalovo pravidlo

Úkol 39.

- a) Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte limity z Úkolů 16 a 17.
b) Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte následující limity (tady $a, b > 0$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}, & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^a n}{n^b}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}{x}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x + e^x + e^{-x} - 4}{x^4}, & \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} + e^{-ax} - 2}{1 - \cos(bx)}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (\log t)^{\frac{1}{t}}, & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2}, & \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \log(x) \cdot \log(1-x) \end{aligned}$$

Úkol 40.

Nalezněte $k \in \mathbb{R}$ tak, aby $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(kx) - x}{x - \sin x} = 2$.

Úkol 41.

Nechť jsou $f(x) = 6x + \sin x$ a $g(x) = 2x + \cos x$. Dokažte, že limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x)$ existuje, ale limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)/g'(x)$ neexistuje. Proč to není spor s l'Hospitalovým pravidlem?