

Vzorová zápočtová písemka

Podrobné vzorové řešení

Číslování odpovídá aktuálnímu zadání. Modře jsou vyznačena zdůvodnění použitých vět a ověření jejich předpokladů, oranžově výsledky. V celém textu je $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ a všechny limity jsou pro $n \rightarrow \infty$.

1. Důkaz přímo z definice (6 bodů)

Zadání

Nalezněte limitu a dokažte ji přímo z definice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2n+1}.$$

1. Proč je třetí odmocnina rostoucí

Pro reálná čísla $u < v$ platí

$$v^3 - u^3 = (v - u)(v^2 + uv + u^2) > 0.$$

První faktor je kladný a druhý lze zapsat jako

$$v^2 + uv + u^2 = \left(v + \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 > 0 :$$

rovnost nule by vyžadovala $u = v = 0$, což odporuje $u < v$. Funkce $u \mapsto u^3$ je tedy na $\mathbb{R}$ rostoucí.

Zdůvodnění. Nechť $x < y$ a položme $u = \sqrt[3]{x}$, $v = \sqrt[3]{y}$. Kdyby $u \geq v$, pak by podle právě dokázané monotonie platilo $x = u^3 \geq v^3 = y$, což je spor. Proto $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$. Třetí odmocnina je na $\mathbb{R}$ rostoucí; důkaz nepoužívá derivace.

2. Definice a volba indexu

Dokážeme limitu $+\infty$, tedy tvrzení

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \sqrt[3]{2n+1} > M.$$

Nechť $M \in \mathbb{R}$ je libovolné. Zvolme

$$n_0 = \max \left\{ 1, \left\lfloor \frac{M^3 - 1}{2} \right\rfloor + 1 \right\}.$$

Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje největší celé číslo nejvýše rovné x . Protože $\lfloor x \rfloor + 1 > x$, pro každé $n \geq n_0$ platí

$$n \geq n_0 > \frac{M^3 - 1}{2}, \quad 2n + 1 > M^3.$$

Zdůvodnění. Z monotonie třetí odmocniny dostáváme $\sqrt[3]{2n+1} > \sqrt[3]{M^3} = M$. Volba n_0 funguje pro každé reálné M , i záporné, a nerovnost platí pro všechny indexy $n \geq n_0$. Tím je ověřena definice nevlastní limity.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{2n+1} = +\infty.$$

2. Rozdíl odmocnin (6 bodů)

Zadání

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt{n^3 - n + 5} \right).$$

Oba výrazy pod odmocninami jsou pro $n \geq 1$ kladné: $n^3 + 2n^2 + 1 > 0$ a $n^3 - n + 5 = n(n-1)(n+1) + 5 > 0$. Přímé odečtení limit by vedlo k nedefinovanému výrazu $+\infty - (+\infty)$. Nejprve proto použijeme sdružený výraz.

1. Úprava a vytknutí nejrychleji rostoucích členů

Označme zkoumanou posloupnost a_n . Potom

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n^3 + 2n^2 + 1) - (n^3 - n + 5)}{\sqrt{n^3 + 2n^2 + 1} + \sqrt{n^3 - n + 5}} \\ &= \frac{n^2 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} \right)}{n^{3/2} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}} \right)} = \sqrt{n} c_n, \end{aligned}$$

kde výslovně definujeme

$$c_n := \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}}}.$$

V čitateli jsme vytkli n^2 , pod oběma odmocninami n^3 . Dělení je dovolené, protože součet kladných odmocnin je nenulový.

2. Limita posloupnosti c_n

Z $1/n^k \rightarrow 0$ pro pevné $k > 0$ a aritmetiky limit plyne

$$2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2} \rightarrow 2, \quad 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3} \rightarrow 1, \quad 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3} \rightarrow 1.$$

Zdůvodnění. Použijeme dokázanou větu o limitním přechodu v odmocnině pevného řádu. Oba výrazy pod odmocninami jsou kladné a konvergují k 1, takže obě odmocniny konvergují k $\sqrt{1} = 1$. Součet ve jmenovateli tedy konverguje k $2 \neq 0$ a aritmetika limit pro podíl dává

$$c_n \rightarrow \frac{2}{1+1} = 1.$$

3. Aritmetika limit na rozšířené reálné ose

Máme $\sqrt{n} \rightarrow +\infty$ a $c_n \rightarrow 1$. Proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty.$$

Zdůvodnění. Větu o limitě součinu lze použít i pro nevlastní limity, pokud je součin limit definován. Zde je $(+\infty) \cdot 1$ definován a roven $+\infty$; nejde o neurčitý tvar $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^3 + 2n^2 + 1} - \sqrt{n^3 - n + 5} \right) = +\infty.$$

3. Použití růstové škály (10 bodů)

Zadání

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 3^{n+1}}{4^{n-1} + (n+1)!}.$$

1. Určení nejrychleji rostoucích členů

Použijeme známou růstovou škálu

$$n^\beta \ll q^n \ll n! \quad (\beta > 0, q > 1),$$

kde $u_n \ll v_n$ znamená $u_n/v_n \rightarrow 0$. V čitateli roste nejrychleji 3^{n+1} , ve jmenovateli $(n+1)!$. Vytkneme tyto členy každý v příslušné části zlomku:

$$\begin{aligned} \frac{n^4 + 3^{n+1}}{4^{n-1} + (n+1)!} &= \frac{3^{n+1} \left(1 + \frac{n^4}{3^{n+1}}\right)}{(n+1)! \left(1 + \frac{4^{n-1}}{(n+1)!}\right)} \\ &= \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1 + \frac{n^4}{3^{n+1}}}{1 + \frac{4^{n-1}}{(n+1)!}}. \end{aligned}$$

2. Použití růstové škály

Podle růstové škály platí přímo

$$\frac{n^4}{3^{n+1}} \rightarrow 0, \quad \frac{4^{n-1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Zdůvodnění. V prvním podílu porovnáváme pevnou mocninu n s exponenciálou se základem větším než 1. V dalších dvou podílech porovnáváme exponenciálu s faktoriálem. Ve všech případech roste jmenovatel podle škály rychleji než čítel, takže příslušný podíl má limitu 0.

3. Aritmetika limit po vytknutí

Z předchozích kroků plyne

$$\frac{1 + \frac{n^4}{3^{n+1}}}{1 + \frac{4^{n-1}}{(n+1)!}} \rightarrow \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Zdůvodnění. Jmenovatel posledního zlomku má nenulovou limitu 1, proto je věta pro podíl použitelná. Celá původní posloupnost je součinem faktoru s limitou 0 a faktoru s limitou 1, takže její limita je $0 \cdot 1 = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 3^{n+1}}{4^{n-1} + (n+1)!} = 0.$$

4. Sdružený výraz a věta o dvou polícajtech (10 bodů)

Zadání

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{5^n + 3 \cdot 2^n} - \sqrt{5^n + 2^n}}.$$

Vnitřní rozdíl je kladný, protože $3 \cdot 2^n > 2^n$, takže vnější odmocnina je dobře definovaná pro každé n , včetně sudých indexů.

1. Sdružený výraz a vytknutí dominantního členu

Položme $r_n = (2/5)^n$. Po použití sdruženého výrazu vytkneme pod oběma odmocninami nejrychleji rostoucí člen 5^n :

$$\begin{aligned} d_n &:= \sqrt{5^n + 3 \cdot 2^n} - \sqrt{5^n + 2^n} \\ &= \frac{2 \cdot 2^n}{\sqrt{5^n + 3 \cdot 2^n} + \sqrt{5^n + 2^n}} \\ &= \frac{2(2/\sqrt{5})^n}{\sqrt{1 + 3r_n} + \sqrt{1 + r_n}}. \end{aligned}$$

Označme $h_n := \sqrt{1 + 3r_n} + \sqrt{1 + r_n}$. Hledaná posloupnost má tvar

$$\sqrt[n]{d_n} = \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{h_n}}.$$

2. Limita výrazu pod vnější odmocninou

Protože $0 < 2/5 < 1$, máme $r_n = (2/5)^n \rightarrow 0$. Tedy

$$1 + 3r_n \rightarrow 1, \quad 1 + r_n \rightarrow 1, \quad h_n \rightarrow \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2.$$

Zdůvodnění. Oba výrazy pod druhými odmocninami jsou kladné. Použijeme dokázaný limitní přechod v odmocnině pevného řádu a potom aritmetiku limit pro součet. Tím je existence limity $h_n \rightarrow 2$ zdůvodněna.

3. Sevření pomocí existence limity

Z $h_n \rightarrow 2$ pro $\varepsilon = 1$ plyne, že existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ platí

$$|h_n - 2| < 1, \quad \text{tedy} \quad 1 < h_n < 3.$$

Odmocněním dostáváme

$$1 \leq \sqrt[n]{h_n} \leq \sqrt[n]{3} \quad (n \geq N).$$

Zdůvodnění. Odmocňujeme kladné veličiny, takže se pořadí zachovává. Levá krajní posloupnost má limitu 1 a pravá také, protože $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$ pro každou pevnou konstantu $c > 0$. Věta o dvou polícajtech proto dává $\sqrt[n]{h_n} \rightarrow 1$. Stačí, že sevření platí od jistého indexu N .

4. Závěrečný limitní přechod

Zdůvodnění. Také $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ a jmenovatel má nenulovou limitu 1. Aritmetika limit pro podíl tedy dává $(2/\sqrt{5}) \cdot 1/1 = 2/\sqrt{5}$. U odmocniny řádu n jsme použili sevření; věta pro odmocninu pevného řádu se na ni přímo nevztahuje.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{5^n + 3 \cdot 2^n} - \sqrt{5^n + 2^n}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

5. Implikace – část (a) (4 body)

Zadání

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$, pak obě posloupnosti (a_n) a (b_n) mají limitu v $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Tvrzení je **nepravdivé**. Předpoklad říká, že členy obou posloupností se k sobě přibližují. Nevylučuje však, že obě posloupnosti společně oscilují.

1. Konstrukce protipříkladu

Pro každé $n \geq 1$ položíme

$$a_n = b_n = (-1)^n.$$

Potom $|a_n - b_n| = 0$ pro každé n , a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0.$$

Předpoklad implikace je splněn.

2. Proč neexistuje konečná limita

Pro sudé a liché indexy máme

$$a_{2k} = 1 \longrightarrow 1, \quad a_{2k-1} = -1 \longrightarrow -1.$$

Zdůvodnění. Kdyby $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$, musela by každá vybraná podposloupnost mít stejnou limitu L . Dostali bychom současně $L = 1$ a $L = -1$, což není možné. Věta o podposloupnostech plyne přímo z definice: z $n_k \rightarrow \infty$ vyplývá, že všechny dostatečně pozdní vybrané indexy překročí index z definice limity původní posloupnosti.

3. Proč neexistuje ani nevlastní limita

Posloupnost je omezená: $-1 \leq a_n \leq 1$. Pro limitu $+\infty$ by například muselo od jistého indexu platit $a_n > 2$; pro limitu $-\infty$ by muselo od jistého indexu platit $a_n < -2$. Ani jedna podmínka neplatí. Proto a_n nemá limitu ani v rozšířené reálné ose. Protože $b_n = a_n$, totéž platí pro (b_n) .

Tvrzení (a) neplatí.

Zdůvodnění. Pro vyvrácení implikace jsme našli případ, kdy je předpoklad pravdivý a zároveň závěr nepravdivý. Samotné uvedení oscilující posloupnosti bez ověření předpokladu by nestačilo.

5. Implikace – část (b) (4 body)

Zadání

Jestliže $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b_n| = 0$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = S \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{S}{2}.$$

Tvrzení je **pravdivé**. Existenci limit (a_n) a (b_n) nesmíme předpokládat: je součástí závěru, který musíme dokázat.

1. Z absolutní hodnoty k limitě rozdílu

Pro každé n platí

$$-|a_n - b_n| \leq a_n - b_n \leq |a_n - b_n|.$$

Zdůvodnění. Pravá ohraničující posloupnost má podle předpokladu limitu 0. Levá má podle věty o násobení konstantou limitu $-0 = 0$. Z věty o dvou polícičkách proto plyne $a_n - b_n \rightarrow 0$. Tento krok nevyžaduje existenci samostatných limit a_n a b_n .

2. Vyjádření obou posloupností pomocí konvergentních výrazů

Označme $s_n = a_n + b_n$ a $d_n = a_n - b_n$. Víme již, že $s_n \rightarrow S \in \mathbb{R}$ a $d_n \rightarrow 0$. Pro každé n přitom platí identity

$$a_n = \frac{s_n + d_n}{2}, \quad b_n = \frac{s_n - d_n}{2}.$$

Zdůvodnění. Obě posloupnosti na pravé straně, s_n a d_n , mají prokázané konečné limity. Smíme proto použít aritmetiku limit pro součet, rozdíl a násobení konstantou $1/2$. Tím zároveň *dokazujeme existenci* hledaných limit:

$$a_n \rightarrow \frac{S + 0}{2} = \frac{S}{2}, \quad b_n \rightarrow \frac{S - 0}{2} = \frac{S}{2}.$$

Tvrzení (b) platí: $\lim a_n = \lim b_n = \frac{S}{2}.$

Stejný důkaz zapsaný jako odhad chyby

Z uvedených identit a trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\left| a_n - \frac{S}{2} \right| \leq \frac{|s_n - S| + |d_n|}{2}, \quad \left| b_n - \frac{S}{2} \right| \leq \frac{|s_n - S| + |d_n|}{2}.$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existují indexy N_1, N_2 , od nichž je $|s_n - S| < \varepsilon$ a $|d_n| < \varepsilon$. Pro $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ jsou tedy oba výrazy vlevo menší než ε . To přímo ověřuje definici obou konečných limit.

Pozor na kruhový argument: Začít zápisem $A = \lim a_n$, $B = \lim b_n$ a řešit rovnice $A - B = 0$, $A + B = S$ by bez předchozího důkazu existence limit nebylo korektní.